$$\rho_1 := (1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\,\partial_1 f\cdot\partial_2 f, \quad \rho_2 := (1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\,(1+(\partial_2 f)^2)$$

und schließen wie oben auf die Existenz von

$$\Psi : D_R(a) \to \mathbb{R}, \qquad \nabla\Psi = (\rho_1, \rho_2),$$

d.h.

$$(2)\quad \begin{cases} \partial_1\Psi = (1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\,\partial_1 f\,\partial_2 f \\ \partial_2\Psi = (1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\,(1+(\partial_2 f)^2). \end{cases}$$

Sei

$$\Lambda(x_1,x_2) = (x_1 + \Phi(x_1,x_2),\; x_2 + \Psi(x_1,x_2)),$$
$$(x_1,x_2) \in D_R(a).$$

Wir berechnen die Funktionaldeterminante:

$$\det D\Lambda(x_1,x_2) = \partial_1\Lambda_1\cdot\partial_2\Lambda_2 - \partial_1\Lambda_2\cdot\partial_2\Lambda_1 \,\Big|_{(x_1,x_2)}$$

$$= \left(1 + (1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\cdot(1+(\partial_1 f)^2)\right)\cdot\left(1+(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}(1+(\partial_2 f)^2)\right)$$

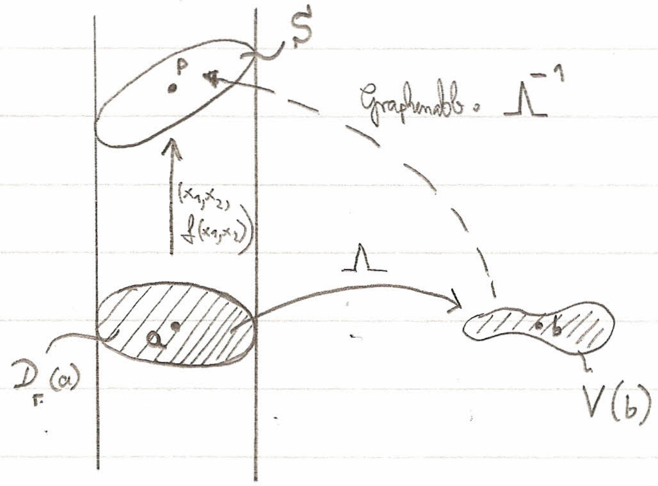
$$- (1+|\nabla f|^2)^{-1}\cdot(\partial_1 f)^2\cdot(\partial_2 f)^2$$

$$\begin{aligned} = 1 &+ (1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\,(2+(\partial_1 f)^2+(\partial_2 f)^2) \\ &+ (1+|\nabla f|^2)^{-1}\cdot(1+(\partial_1 f)^2)(1+(\partial_2 f)^2) \\ &- (1+|\nabla f|^2)^{-1}\,(\partial_1 f)^2\cdot(\partial_2 f)^2 \qquad > 1, \end{aligned}$$

so daß Λ insbesondere eine kleinere Kreisscheibe $D_r(a)$ diffeomorph auf eine Umgebung $V(b)$ des Punktes $b = \Lambda(a)$ abbildet. (Tatsächlich ist Λ sogar besser $\longrightarrow$ vgl. Lemma 5.4)

Schließlich betrachten wir die Abbildung

$$\chi : V(b) \ni (\xi_1, \xi_2) \longrightarrow \left(\left(\Lambda|_{D_r(a)}\right)^{-1}(\xi_1,\xi_2),\ f\circ\left(\Lambda|_{D_r(a)}\right)^{-1}(\xi_1,\xi_2)\right)$$



Nach Konstruktion ist klar, daß χ den Bereich $V(b)$ auf eine Umgebung von p in S abbildet, nämlich auf genau den Teil von S im Kreiszylinder $D_r(a) \times \mathbb{R}$ über der verkleinerten Kreisscheibe $D_r(a)$.
Weiterhin ist offensichtlich, daß χ überall den maximal möglichen Rang 2 hat, denn dies gilt für die Graphenabbildung und diese wird von rechts mit dem Diffeomorphismus $\left(\Lambda|_{D_r(a)}\right)^{-1}$ verknüpft.

Nachzurechnen bleiben die Konformitätsrelationen:

Es gilt $\quad \left((\eta_1,\eta_2) = \left(\Lambda|_{D_r(a)}\right)^{-1}(\xi_1,\xi_2) \right)$

$$D\left(\Lambda|_{D_r(a)}\right)^{-1}(\xi_1,\xi_2) = \left(D\Lambda(\eta_1,\eta_2)\right)^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\left(1+(\partial_1 f)^2\right) & (1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\,\partial_1 f\cdot\partial_2 f \\ (1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\,\partial_1 f\cdot\partial_2 f & 1+(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\left(1+(\partial_2 f)^2\right) \end{pmatrix}^{-1}_{|(\eta_1,\eta_2)}$$

$$= \frac{1}{\det(\ldots)} \begin{pmatrix} 1+(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\left(1+(\partial_2 f)^2\right) & -(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\,\partial_1 f\cdot\partial_2 f \\ -(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\,\partial_1 f\cdot\partial_2 f & 1+(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\left(1+(\partial_1 f)^2\right) \end{pmatrix}_{|(\eta_1,\eta_2)} \ast$$

und

$$D\left(f\circ\left(\Lambda\big|_{D_r(a)}\right)^{-1}\right)(\xi_1,\xi_2) =$$

$$Df(\eta_1,\eta_2)\circ D\left(\Lambda\big|_{D_r(a)}\right)^{-1}(\xi_1,\xi_2) =$$

$$(\det D\Lambda(\eta_1,\eta_2))^{-1}\cdot(\partial_1 f,\partial_2 f)_{|(\eta_1,\eta_2)}\circ\begin{pmatrix} * \\ \dots \end{pmatrix} =$$

$$(\det D\Lambda(\eta_1,\eta_2))^{-1}\cdot\Big(\partial_1 f + \partial_1 f\cdot(1+(\partial_2 f)^2)(1+|\nabla f|^2)^{-1/2} - \partial_1 f\cdot(\partial_2 f)^2(1+|\nabla f|^2)^{-1/2},$$

$$-(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\partial_2 f(\partial_1 f)^2+\partial_2 f+\partial_2 f(1+(\partial_1 f)^2)(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\Big)$$

$$= (\det D\Lambda(\eta_1,\eta_2))^{-1}\cdot\left(\partial_1 f\left[1+(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\right],\ \partial_2 f\left[1+(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\right]\right)$$

$$= \frac{1+(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}}{\det D\Lambda(\eta_1,\eta_2)}\,(\partial_1 f,\ \partial_2 f).$$

Daraus folgt:

$$D\chi(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{\det D\Lambda(\eta_1,\eta_2)}\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1+(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}(1+(\partial_2 f)^2) \\ -(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\,\partial_1 f\cdot\partial_2 f \\ \{1+(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\}\cdot\partial_1 f \end{matrix}}_{=:X} & \underbrace{\begin{matrix} -(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\,\partial_1 f\partial_2 f \\ 1+(1+|\nabla f|^2)^{-1/2}(1+(\partial_1 f)^2) \\ (1+(1+|\nabla f|^2)^{-1/2})\,\partial_2 f \end{matrix}}_{=:Y} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad X\cdot Y \quad =$$

$$- \left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2} \partial_1 f \cdot \partial_2 f \quad - \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \left(1+(\partial_2 f)^2\right) \quad \partial_1 f \cdot \partial_2 f$$

$$- \left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2} \partial_1 f \cdot \partial_2 f \quad - \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \left(1+(\partial_1 f)^2\right) \cdot \partial_1 f \cdot \partial_2 f$$

$$+ \ \partial_1 f \cdot \partial_2 f \cdot \left\{ 1 + 2 \cdot \left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2} + \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \right\} =$$

$$-2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_2 f \ \left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2} - \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \left(1 + \left(1+|\nabla f|^2\right)\right) \partial_1 f \cdot \partial_2 f$$

$$+ \ \partial_1 f \cdot \partial_2 f \cdot \left\{ 1 + 2 \cdot \left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2} + \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \right\} \equiv 0,$$

$$|X|^2 - |Y|^2 =$$

$$1 + 2 \cdot \frac{1+(\partial_2 f)^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} + \frac{\left(1+(\partial_2 f)^2\right)^2}{1+|\nabla f|^2} + (\partial_1 f)^2 \cdot (\partial_2 f)^2 \frac{1}{1+|\nabla f|^2}$$

$$+ (\partial_1 f)^2 \ \left(1 + 2 \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} + \frac{1}{1+|\nabla f|^2}\right)$$

$$- \Bigg(1 + 2 \cdot \frac{1+(\partial_1 f)^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} + \frac{\left(1+(\partial_1 f)^2\right)^2}{1+|\nabla f|^2} + (\partial_1 f)^2 (\partial_2 f)^2 \frac{1}{1+|\nabla f|^2}$$

$$+ (\partial_2 f)^2 \cdot \left\{ 1 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} + \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \right\} \Bigg)$$

$$= 2 \cdot \frac{1+(\partial_2 f)^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} + \frac{\left(1+(\partial_2 f)^2\right)^2}{1+|\nabla f|^2} + (\partial_1 f)^2 \cdot \left[1 + \frac{2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} + \frac{1}{1+|\nabla f|^2}\right].$$

$$- 2 \cdot \frac{1+(\partial_1 f)^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\left(1+(\partial_1 f)^2\right)^2}{1+|\nabla f|^2} - (\partial_2 f)^2 \left[\ \ldots\ldots \ \right]$$

$$= 2\,\frac{1+(\partial_2 f)^2 - 1-(\partial_1 f)^2 + (\partial_1 f)^2 - (\partial_2 f)^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}$$

$$+ \frac{(1+(\partial_2 f)^2)^2 + (\partial_1 f)^2 - (1+(\partial_1 f)^2)^2 - (\partial_2 f)^2}{1+|\nabla f|^2}$$

$$+ (\partial_1 f)^2 - (\partial_2 f)^2$$

$$= (1+|\nabla f|^2)^{-1} \cdot \left(1+(\partial_2 f)^2 + (\partial_2 f)^4 - 1 - (\partial_1 f)^2 - (\partial_1 f)^4\right)$$

$$+ (\partial_1 f)^2 - (\partial_2 f)^2$$

$$= (1+|\nabla f|^2)^{-1} \Big((\partial_2 f)^2 + (\partial_2 f)^4 - (\partial_1 f)^2 - (\partial_1 f)^4$$

$$+ (\partial_1 f)^2 \cdot (1+|\nabla f|^2) - (\partial_2 f)^2 (1+|\nabla f|^2) \Big)$$

$$= (1+|\nabla f|^2)^{-1} \Big((\partial_2 f)^2 + (\partial_2 f)^4 - (\partial_1 f)^2 - (\partial_1 f)^4 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_1 f)^2 \cdot (\partial_2 f)^2 + (\partial_1 f)^4$$
$$- (\partial_2 f)^2 - (\partial_2 f)^2 \cdot (\partial_1 f)^2 - (\partial_2 f)^4 \Big)$$

$$\equiv 0 .$$

Die Rechnung zeigt

$$\partial_1 X \cdot \partial_2 X = 0, \; |\partial_1 X| = |\partial_2 X|,$$

so daß X eine konforme Parametrisierung von S bei p ist.

■

Als Anwendung bekommt man

SATZ 3.3: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung. Dann ist f reell analytisch.

Beweis: Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$ beliebig. Nach den Überlegungen aus dem vorigen Satz gibt es eine kleine Kreisscheibe $D_r(x_0, y_0)$, eine offene Menge $O \subset \mathbb{R}^2$ und einen C^2-Diffeomorphismus $\Lambda : D_r(x_0, y_0) \longrightarrow O$, so daß

$$X := (\Lambda^{-1}, f \circ \Lambda^{-1}) : O \to \mathbb{R}$$

die Fläche G_f lokal bei $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ konform parametrisiert.

(bemerke: Λ ist so regulär wie die beiden Funktionen Φ, Ψ; aus den Formeln (1), (2) folgt, daß die Ableitungen von Φ, Ψ nur erste Ableitungen von f enthalten. Für C^2-Funktionen f sind also auch Φ, Ψ von der Klasse C^2.) Nach Lemma 3.2 gilt

$$\Delta X = \Delta(X^1, X^2, X^3) = 0,$$

die anschließende Proposition ergibt: X^1, X^2, X^3 sind reell analytisch. Insbesondere ist Λ^{-1} reell analytisch (genauer: jede Komponente von Λ^{-1}) und damit auch Λ selbst. Die Analyzität von $X^3 = f \circ \Lambda^{-1}$ ergibt:

$$f = (f \circ \Lambda^{-1}) \circ \Lambda \in C^\omega,$$

was zu zeigen war. ∎

PROPOSITION: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $h : \Omega \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 eine harmonische Funktion. Dann ist h reell analytisch.

Beweis: Sei $D_r(x_0, y_0) \subset \Omega$. Man sucht eine Funktion $H : D_r(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$ so, daß

$$f := h + i H \; : D_r(x_0, y_0) \longrightarrow \mathbb{C}$$

auf dem Kreis holomorph wird. Die Analyzität von f liefert dann sofort die von h.

Sei $(x_0, y_0) = (0,0)$. Man setzt an (unterstellt H existiert)

$$H(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} H(tx, ty)\, dt + H(0,0) =$$

$$\int_0^1 x \cdot (\partial_x H)(tx, ty) + y \cdot (\partial_y H)(tx, ty) + H(0,0) =$$

$$\int_0^1 x \cdot (-\partial_y h)(tx, ty) + y \cdot (\partial_x h)(tx, ty) + H(0,0)$$

nach den C.-R. Dglen. Da die Konstante $H(0,0)$ unwesentlich ist, wird man auf folgende Definition geführt:

$$H(x,y) = \int_0^1 x(-\partial_y h)(tx, ty) + y(\partial_x h)(tx, ty)\, dt$$

Zu überprüfen ist, ob für $f := h + iH$ nun wirklich die C.R. Dglen gelten:

$$\frac{\partial}{\partial x} H(x,y) = \int_0^1 (-\partial_y h)(tx, ty) - x \cdot (\partial_x \partial_y h)(tx, ty) \cdot t + t\, y (\partial_x \partial_x h)(tx, ty)\, dt$$

$$\overset{h \text{ harmonisch}}{=} \int_0^1 (-\partial_y h)(tx, ty) - x t (\partial_x \partial_y h)(tx, ty) - t (\partial_y \partial_y h)(tx, ty)\, y\, dt$$

Es ist $\displaystyle \frac{\partial}{\partial t} \left(\partial_y h(tx, ty) \right) = x \cdot (\partial_x \partial_y h)(tx, ty) + y \cdot (\partial_y \partial_y h)(tx, ty),$

also

$$\frac{\partial}{\partial x} H(x,y) = \int_0^1 (-\partial_y h)(tx, ty) - t \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\partial_y h(tx, ty) \right) dt$$

$$= -\partial_y h(x,y) ,$$

und mit demselben Argument folgt $\frac{\partial}{\partial y} H = \frac{\partial h}{\partial x}$.

■

<u>BEMERKUNG</u>: H heißt zu h konjugiert harmonische Funktion. H existiert lokal immer und ist bis auf additive Konstanten eindeutig, auf einfach zusammenhängenden Gebieten findet man global konjugiert harmonische Funktionen.
Umgekehrt gilt (C.R. Differentialgleichungen): ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so sind $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ natürlich harmonisch.